第８講　定義に従って微分

8　次の各問いに答えよ．ただし，関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は微分可能であるものとする．

(1)　自然数 n に対して $f(x)=x^n$ とおくとき，$f(x)$ を定義に従って微分せよ．

(2)　実数 α に対し，$f(x)=\alpha g(x)$ とするとき，$f'(x)=\alpha g'(x)$ であることを示せ．また，$f(x)=g(x)+h(x)$ とおくとき，$f'(x)=g'(x)+h'(x)$ であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$ （n は自然数）を $f(a)$ と a，及び $f'(a)$ を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　定義に従って微分

8 次の各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ の $x=r$ における微分係数 $f'(r)$ を定義に従って求めよ.

(2) 任意の実数 x に対して微分可能な関数 $f(x)$ が $f(2x)=2f(x)$ を満たすとき, $f'(2x)=f'(x)$ であることを示せ.

【選択肢】

(1) ㋐ $f'(r)=2ar$　㋑ $f'(r)=2ar+b$　㋒ $f'(r)=2ax+b$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　定義に従って微分

8　次の各問いに答えよ．ただし，関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は微分可能であるものとする．

(1)　自然数 n に対して $f(x)=x^n$ とおくとき，$f(x)$ を定義に従って微分せよ．

(2)　実数 α に対し，$f(x)=\alpha g(x)$ とするとき，$f'(x)=\alpha g'(x)$ であることを示せ．また，$f(x)=g(x)+h(x)$ とおくとき，$f'(x)=g'(x)+h'(x)$ であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$ （n は自然数）を $f(a)$ と a，及び $f'(a)$ を用いて表せ．

【答】 (1) $f'(x)=nx^{n-1}$　(2) 略　(3) $3f'(a)$　(4) $a^nf'(a)-na^{n-1}f(a)$

【解答】

(1)　$f(x)=x^n$ より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\cdots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\cdots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\}$$

$$=\boldsymbol{nx^{n-1}}$$

(2)　$f(x)=\alpha g(x)$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha g(x+h)-\alpha g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\alpha\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\alpha g'(x)$$

また，$f(x)=g(x)+h(x)$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x+h)+h(x+h)\}-\{g(x)+h(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{h(x+h)-h(x)}{h}\right\}$$

$$=g'(x)+h'(x)$$

(3)　$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$

$$=f'(a)\times 2+f'(a)=\boldsymbol{3f'(a)}$$

(4)　$$\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^n\{f(x)-f(a)+f(a)\}-x^nf(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^n\{f(x)-f(a)\}-(x^n-a^n)f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a^n\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})f(a)\right\}$$

$$=\boldsymbol{a^nf'(a)-na^{n-1}f(a)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　定義に従って微分

8 次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ の $x=r$ における微分係数 $f'(r)$ を定義に従って求めよ．

(2) 任意の実数 x に対して微分可能な関数 $f(x)$ が $f(2x)=2f(x)$ を満たすとき，$f'(2x)=f'(x)$ であることを示せ．

【選択肢】

(1) ㋐ $f'(r)=2ar$　㋑ $f'(r)=2ar+b$　㋒ $f'(r)=2ax+b$

【答】 (1) ㋑ (2) 略

【解答】

(1) $x\neq r$ のとき

$$f(x)-f(r)=(ax^2+bx+c)-(ar^2+br+c)$$
$$=a(x-r)(x+r)+b(x-r)$$
$$\frac{f(x)-f(r)}{x-r}=a(x+r)+b$$

となるので

$$f'(r)=\lim_{x\to r}\frac{f(x)-f(r)}{x-r}$$
$$=\lim_{x\to r}\{a(x+r)+b\}$$
$$=\boldsymbol{2ar+b}$$

(2) $f(2x)=2f(x)$ より，$f(2(x+h))=2f(x+h)$ となるので

$$\frac{f(2x+2h)-f(2x)}{2h}=\frac{f(2(x+h))-f(2x)}{2h}$$
$$=\frac{2f(x+h)-2f(x)}{2h}$$
$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を得る．また

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2x+2h)-f(2x)}{2h}=f'(2x),\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

より，$f'(2x)=f'(x)$ であることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。